Olimpiada Naţională de Matematică

Primul test de selecţie pentru OBM şi OIM – Seniori 2003

Subiectul 1

Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, definit prin $a_1 = \frac{1}{2}$ şi

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}, \qquad \text{pentru } n \geq 1.$$

Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \geq 1$, avem

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < 1.$$

Subiectul 2

In interiorul triunghiului ABC având $m(\angle A) = 60°$, există un punct P cu $PA = 1$, $PB = 2$ şi $PC = 3$. Să se determine maximul ariei triunghiului ABC.

Subiectul 3

Fie $n, k \in \mathbf{N}^*$ cu $n^k > (k+1)!$ şi mulţimea

$$M = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid x_i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ i = \overline{1, k}\}.$$

Arătaţi că dacă $A \subset M$ are $(k+1)! + 1$ elemente, atunci există $\{\alpha, \beta\} \subset A$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ astfel încât

$$(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2)\cdots(\beta_k - \alpha_k) \quad \text{să fie divizibil cu } (k+1)!.$$

Timp de lucru: 4 ore